ЛЕКЦИЯ 5.
Нерелятивистская динамика

А.И. Валишев, В.Г. Сербо .

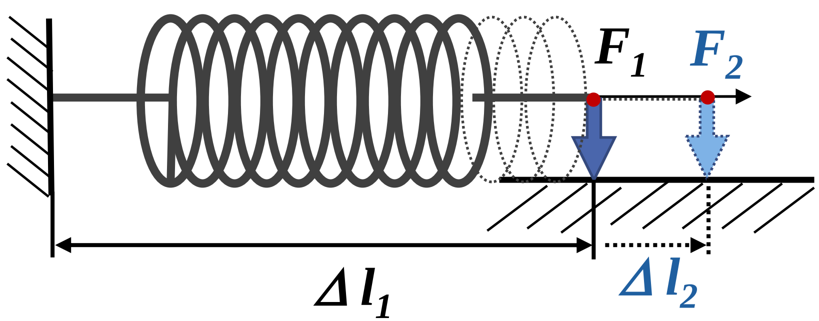
8. Ньютоновские законы динамики.

Утверждение. **Если скорость частицы не является постоянной,** $v \neq const$ **то частица не является свободной. Есть некоторое взаимодействие со стороны внешних тел осуществляемое посредством сил.**

8.1 Сила.

Интуитивно сила это некоторое давление, механическое напряжение. Напряжение (механическое) сопровождается деформацией.

Для измерения сил устанавливается эталон – единица измерения силы. Эталону силы ставится в соответствие деформация экспериментального прибора, например пружины. Определяется процедура измерения, экспериментальная методика. Выполняется калибровка динамометра (пружины) – известной силе, кратной эталону, ставится в соответствие деформация - удлинение Δl **пружины. Удобно, когда деформация = удлинение пропорциональна силе.** $F \propto \Delta l$.



Динамометр.

8.2 Второй закон Ньютона.

Экспериментально установлено : ускорение тела *a*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ **пропорционально силе *F*.**

***а)* Ускорение направлено в направлении действующей силы: следовательно ускорение и сила являются векторами;**

***б)* Величина = модуль ускорения пропорционален модулю силы**

$$|\,\boldsymbol{a}\,| \propto |\,\boldsymbol{F}\,|\,;$$

Объединение *а)* + *б)* является содержанием второго Закона Ньютона:

$$\boldsymbol{a} \propto \boldsymbol{F}$$

«Ускорение частицы пропорционально действующей на частицу силе»

Коэффициент пропорциональности между силой и ускорением является константой. Коэффициент (константа) назван массой частицы m. Константа m не зависит, в частности, от скорости частицы. Очевидно, m одинакова в различных инерциальных системах отсчета.

Аналитическая запись *II*-го закона Ньютона:

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}\,.$$

***Замечание.* Рассматривается движение частиц с неизменной массой $m = const$.**

8.2.1 Масса.

Эталоны массы

система СИ – $\boldsymbol{1}$ ***кг.***

система CGS - ***1г = 10*** $^{-3}$ ***кг.***

1 а.е.м. (атомная единица массы) =

= $1/12$ **массы атома углерода** $^{12}C = 1.6606\cdot 10^{-27}$ ***кг.***

8.3. Третий закон Ньютона.

При парном взаимодействии частицы i **с частицей** j **сила** $F_{i\to j}$**, действующая со стороны** i **на частицу** j**: равна противоположной силе, действующей со стороны** j **на частицу** i**:** $= (-)F_{j\to i}$

$$F_{ij} = -F_{ji}\,.$$

8.3.1. Свойства сил

1. **Сила – векторная величина;**
2. **Существуют источник силы, агент;**
3. **Независимость действия сил;**
4. **Выполняется принцип суперпозиции сил;**

8.3.2. Единицы измерения сил.

система ед. СИ – ***1н = 1кг·1м/1с²*** ***(Ньютон)***

CGS – ***1д = 1г·1см/с²*** ***(дина)***

Упражнение. Определить соотношение 1Н / 1 д = ?

8.4. Ковариантность уравнений движения при преобразованиях Галилея.

Df. **Уравнением движения называется аналитическое выражение**

***II*-го закона Ньютона:**

$$m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i\neq j}\vec{F}_{ij} = \sum_{i\neq j}\vec{F}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \ ;$$

$$m \cdot d^2\mathbf{r}_i /dt^2 = \sum_{i\neq j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i\neq j} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,.$$

Считается, что силы между выделенной частицей $\boldsymbol{i}$ и другими $\boldsymbol{j}$ зависят только от относительного радиус- вектора – взаимного векторного расстояния $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$: $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$

Докажем клвариантность *II*-го закона Ньютона. Выполняется преобразование Галилея – переход из инерциальной систем*ы* *S* в систему *S′* по правилу:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}\,,\ \ \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j\ ,\quad \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\,.$$

Отсюда *:*

$$m\frac{d^2\vec{r}'_i}{dt^2} = \sum_{i\neq j}\vec{F}\left(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j\right) \ ;$$

$$\Rightarrow\ m \cdot d^2\mathbf{r}'_i /dt^2 = \sum_{i\neq j} \mathbf{F}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j).$$

Уравнения ковариантны ≡ не меняют вида в новых переменных.

8.4. Ковариантность уравнений движения при преобразованиях Галилея.

Доказано:

Уравнения движения ковариантны ≡ не меняют вида в новых переменных.

8.5. Область применимости Ньютоновой механики *(НМ)* – нерелятивистские скорости частиц.

Уравнения *НМ* не!применимы в квантовой физике из-за отсутствия понятия траектории, вероятностного определения координаты частиц. В квантовой физике определены специфические обменные взаимодействия отличающиеся от потенциального взаимодействия.

Пример. **Решение уравнения движения.**

Проинтегрируем одномерное уравнение движения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F(t)\,.$$

Сила меняется со временем по закону $F = F_x\,(t) = F_0\cos(\omega t)\,.$

Рассматривается одномерное движение индекс x **всюду далее опущен.**

Перепишем уравнение движения - $m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\dot{x} = F_0\cos(\omega t)\,.$

Первый интеграл: $\dot{x}(t) = \frac{F_0}{m\omega}\sin(\omega t) + C_1\,.$

Второе интегрирование: $x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) + C_1 t + C_2$

Пусть начальные данные (при $t = 0$**) скорость** $dx/dt = 0$, **координата** $x(0) = 0$.

Тогда константы: $C_1 = 0$, $C_2 = F_0/m\omega^2$

В этом случае решение имеет вид:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos(\omega t))\,.$$

Упражнение. **Построение графиков** $F(t)$, $v(t)$, $x(t)$ **.**

8.6. Численное решение уравнений движения.

Рассматривается модельная задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести. Более сложная модель - существует сила трения – сила сопротивления воздуха $\boldsymbol{F}_{тр}$. Предполагается, что $\boldsymbol{F}_{тр} = - k\cdot \boldsymbol{v}$, $k = const$. Сила трения пропорциональна скорости и направлена против скорости.

Записывается уравнение движения тела:

$$m\, d\boldsymbol{v}/dt = \sum \boldsymbol{F} = - k\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{g} \qquad (*),$$

Решение уравнения *(*)* (проверяется прямой подстановкой в уравнение) –

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0\cdot exp(-kt/m) + (m\boldsymbol{g}/k)\cdot [1- exp(-kt/m)],$$

Допускается численное решение задачи.

Вводятся дискретные величины t_i – время, компоненты скорости $v_{xi} = U_i$, $v_{yi} = V_i$. Определяются разностные (сеточные) производные. Если $t_{i+1} = t_i + \tau$, то с некоторой погрешностью:

$$dU/dt \approx (U_{i+1} - U_i)/ \tau ; \quad dV/dt \approx (V_{i+1} - V_i)/ \tau .$$

Подстановка сеточных производных в уравнение позволяет организовать вычислительный алгоритм, который по предыдущим значениям скорости $U_n(n\tau)$, $V_n(n\tau)$, позволяет вычислить следующие значения $U_{n+1}((n+1)\tau)$, $U_{n+1}((n+1)\tau)$.

При реализации разностных схем возникают вопросы порядка аппроксимации разностной схемы и устойчивости.

Схема 1-го порядка аппроксимации (погрешность пропорциональна τ):

x: $m(U_{i+1} - U_i)/ \tau = -kU_i$, $\qquad$ y: $m(V_{i+1} - V_i)/ \tau = -kV_i - g\tau$,

Схема 2-го порядка аппроксимации (погрешность пропорциональна τ^2) :

x: $m(U_{i+1} - U_i)/ \tau = -k\, (U_{i+1} + U_i)/ 2$, $\qquad$ y: $m(V_{i+1} - V_i)/ \tau = -k\, (V_{i+1} + V_i)/ 2 - g\tau$.

9. Импульс.

Импульсом частицы называется физическая величина равная произведению массы на скорость:

$$\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$$

9.1. Закон сохранения импульса замкнутой системы частиц.

Df. **Замкнутая система частиц.**

Попарное взаимодействие осуществляется между частицами некоторого ограниченного множества.

Результирующая, полная, сила $\boldsymbol{F}_{\Sigma}$ является векторной суммой сил, действующих на все частицы множества:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ ,$$

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = \sum\nolimits^{N}{}_{i=1} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \ .$$

Каждая *i – я* сила складывается из всех парных сил, действующих со стороны других частиц, кроме *i* – ой (самодействие исключено):

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i,j} \ , \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i,j} \ ;$$

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} = \sum\nolimits_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}} \ . \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_{\Sigma} = \sum\nolimits^{N}{}_{i=1} \sum\nolimits_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}} \ .$$

9. Импульс.

Симметризуем последнее соотношение:

$$\sum_{i\neq j}\vec{F}_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i}\right) \;;$$

$$\Sigma_{i\neq j}\, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}} = (1/2)\cdot\ \Sigma_{i\neq j}\,(\boldsymbol{F}_{i\,j} + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}\,j})\,.$$

По *III*-му закону Ньютона:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i}\right) = 0\;!$$

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = \Sigma^{N}{}_{i=1}\,\boldsymbol{F}_i = \Sigma^{N}{}_{i=1}\,1/2\cdot\ \Sigma_{i\neq j}\,(\boldsymbol{F}_{i\,j} + \boldsymbol{F}_{i\,j}) = 0.$$

Если $\boldsymbol{F}_{\Sigma} = 0$, то:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{d}{dt}\vec{P}_{\Sigma} = 0$$

$$\Sigma^{N}{}_{i=1}\,\boldsymbol{F}_i = \Sigma^{N}{}_{i=1}\, m_i\cdot d\boldsymbol{v}_i/dt = d/dt\,(\Sigma^{N}{}_{i=1}\, m_i\cdot\boldsymbol{v}_i\,) =$$

$$= d/dt\,(\Sigma^{N}{}_{i=1}\,\boldsymbol{p}_i) = d/dt\,(\boldsymbol{P}_{\Sigma}) = 0\;,$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{P}_{\Sigma} = \boldsymbol{P} = const\;.$$

«Импульс замкнутой системы частиц сохраняется» .

«Импульс замкнутой системы частиц сохраняется» .

$$\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = 0\,, \qquad \rightarrow \ \vec{P}_\Sigma = \overrightarrow{const}$$

9.1.1. Система частиц незамкнута, существуют внешние силы действующие на каждую частицу:

$$F_{\text{внешн}} = \sum_i F_{i\ \text{внешн}} \neq 0$$

В этом случае:

$$\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}}\ ;$$

«Скорость изменения полного импульса системы равна сумме внешних сил, = результирующей силе».

9.1.2. Импульс силы.

Df. **Произведение (приращение)** $\boldsymbol{F}\cdot dt$ **называется изменением импульса силы = импульсом силы** $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\cdot dt$ **.**

Пример. Пусть $\boldsymbol{F} = const$ **в течение времени** τ**. Импульс силы**

$$\Delta\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{F}\cdot\int dt = \boldsymbol{F}\cdot\tau.$$

Если сила меняется со временем:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \int \boldsymbol{F}\,dt\,.$$

9.2. Центр масс системы частиц.

Df. **Радиус – вектор *R* центра масс системы частиц:**

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \; ;$$

$$\boldsymbol{R} = (\sum_i m_i \cdot \boldsymbol{r}_i) / \sum_i m_i = (\sum_i m_i \cdot \boldsymbol{r}_i) / M \, .$$

Пример 1.

Координата центра масс гантельки.

Гантелька – две массы, соединенные безмассовым стержнем:

$m_1 = m, \; m_2 = M \, ; \quad x_1 = 0, \; x_2 = L.$

$$X = (m \cdot 0 + M \cdot L)/(m+M) = M \cdot L/(m+M) \, .$$

Пример 2.

Центр масс однородного равностороннего треугольника. Сторона треугольника *a*. **Масса треугольника** *m*. **Масса равномерно распределена по площади треугольника.**

$$X_{cm} = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int x\rho ds}{m} = \frac{\int_0^h x\rho \cdot 2\, y(x) dx}{m} \, ,$$

$$y(x) = x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = x\frac{1}{\sqrt{3}} \, , \qquad \rho = \frac{m}{S_\Delta} = \frac{2m}{a^2\sqrt{3}} \; , \; h = a\frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

$$X_{cm} = \frac{2\rho h^3}{3\sqrt{3}m} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{2m}{a^2\sqrt{3}} \cdot \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) \Big/ m = \frac{a}{2\sqrt{3}} \, .$$

9.2.1. Скорость движения центра масс (цм) системы частиц.

***Df*.**

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i (d\vec{r}_i/dt)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}\ .$$

Окончательно:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Если система частиц замкнута, *P* = *const* $\Rightarrow$ скорость центра масс сохраняется.

В противном случае, если система незамкнута:

$$M \cdot d\mathbf{V}_{цм}/dt = d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}\ .$$

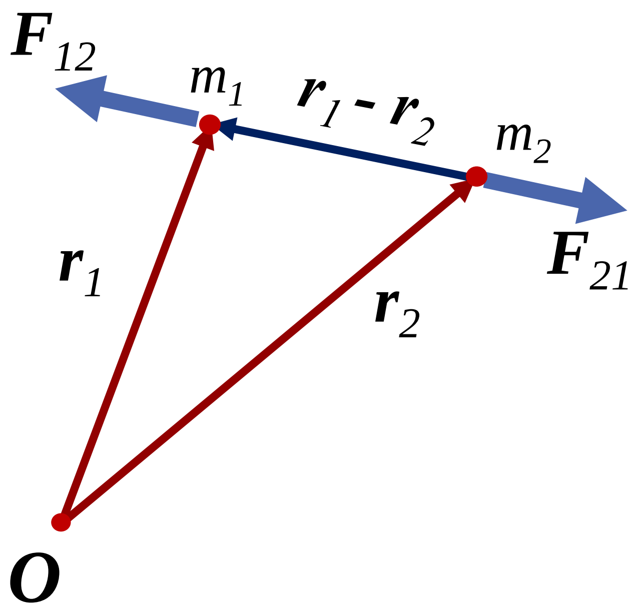
Движение точки с координатами центра масс системы рассматривается как движение частицы с массой равной полной массе системы.

Выполняется закон аддитивности масс: масса складывается из масс составных частей.

Закон аддитивности масс справедлив только в нерелятивистской механике.

9.3. Задача двух тел.

Рассматривается задача взаимодействия 2-х частиц. Массы частиц соответственно m_1 , m_2 **. На частицы действуют силы:**
на 1-ю со стороны 2-й: $\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$;
на 2-ю со стороны 1-й: $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$.



Записываем уравнения движения частиц:

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \qquad m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2);$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}}{m_1} + \frac{\vec{F}}{m_2} = \vec{F} \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\mu};$$

Получено уравнение, определяющее динамику изменения радиус – вектора относительного расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Здесь μ - приведенная масса .

$$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}), \qquad \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} .$$

Кроме того, нетрудно показать, что радиус – вектор центра масс системы в отсутствие внешних сил движется с постоянной скоростью. Действительно, после введения $\boldsymbol{R}$ радиус – вектора центра масс:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

находим: $\ddot{\vec{R}} = 0$, что означает, что $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V} \cdot t$ – равномерное движение.

Summary. Задача 2-х тел сводится к интегрированию уравнения движения частицы с приведенной массой под действием известной силы и равномерному движению центра масс системы.

10. Сила равна скорости изменения импульса.

Для замкнутой системы частиц:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{const}\ .\ (*)$$

В двухчастичном взаимодействии соотношение (*) позволяет определить массу частицы в сравнении с эталонной массой – m_0 **:**

$$m_0\vec{v}_{10} + m_x\vec{v}_{20} = m_0\vec{v}_{11} + m_x\vec{v}_{21};$$

По известным начальным и конечным значениям импульсов определяется неизвестная масса:

$$m_x = m_0\,\frac{|\vec{v}_{11} - \vec{v}_{10}|}{|\vec{v}_{21} - \vec{v}_{20}|}\,.$$

При таком подходе «сила есть скорость изменения импульса»:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ !$$

Уравнение эквивалентно *II*-му закону Ньютона, т.к. подстановка $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ **при неизменной массе частицы дает соотношение между ускорением и силой. Уравнение «скорость изменения импульса = силе» имеет бо′льшие границы применимости. В частности, снимается ограничение** $m = const$.

Summary. **Знание сил взаимодействия, которые зависят от координат, и, возможно скоростей частиц, при заданных начальных координатах частиц, а также известных начальных импульсах частиц позволяет определить все дальнейшее движение частиц.**

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

http://phys.nsu.ru/fit

http://el.nsu.ru